Resumen de Algebra 2

1. **Espacios vectoriales**

Un espacio vectorial es una estructura algebraica que reúne cuatro elementos: (V, F, +, ·), donde V es un conjunto no vacío, que posee dos operaciones + y · (suma y producto por un escalar). + es una operación binaria interna definida para los elementos del conjunto V, · es una operación binaria externa definida entre los elementos de un cuerpo numérico F y V. La estructura de espacio vectorial respeta 8 propiedades que determinan el comportamiento de la suma, el comportamiento de producto por escalar y como se relacionan la suma y el producto. Definiciones y propiedades de cada una:

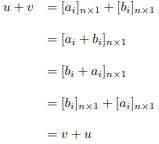
* Suma: operación binaria que toma dos elementos de un conjunto de números y devuelve otro número del mismo conjunto
  + Conmutativa: u + v = v + u
  + Asociativa: (u + v) + w = u + (v + w)
  + Elemento neutro: el elemento neutro 0 ∈ V y cumple que u + 0 = 0 + u = u.
  + Inverso aditivo: para cada u ∈ V existe un elemento −u ∈ V y cumple que u + (−u) = (−u) + u = 0
* Producto por escalar: Llamamos escalares a los elementos α ∈ F. es una función · : F × V → V , es decir, toma un elemento de α ∈ F y un elemento u ∈ V , y devuelve un elemento αu ∈ V , tal que para cada α, β ∈ F, y cada u, v ∈ V se cumplan las siguientes propiedades:
  + Distributividad del producto respecto a la suma vectorial: α (u + v) = αu + αv
  + Distributividad de la suma escalar respecto al producto: (α + β) u = αu + βu
  + Asociatividad del producto respecto del producto escalar: (αβ)u = α(βu)
  + Neutro multiplicativo: 1u = u.

Por lo tanto, concluimos que un subconjunto no vacío V recibe el nombre de espacio vectorial sobre el cuerpo F si en V hay definidas una suma y un producto por escalar con escalares en F. A los elementos de V les llamamos vectores. Si F = R diremos que el espacio vectorial es real, y si F = C diremos que el espacio vectorial es complejo

Si tuviésemos que demostrar cada propiedad de los elementos se deberían realizar los siguientes procedimientos:

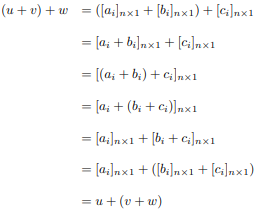
Supongamos que tenemos los siguientes vectores: u = [ai ]n×1, v = [bi ]n×1 y w = [ci ]n×1.

Para demostrar la **suma** se deberían realizar las siguientes verificaciones:

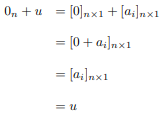
* 1. **Conmutatividad**:

Así concluimos que u + v = v + u, es decir, que se cumple la propiedad conmutativa.

* 1. **Asociatividad**:

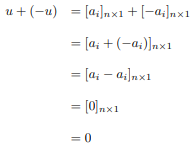


* 1. **Elemento neutro**: Tomamos el elemento 0n = [0]n×1 la n-tulpa cuyas componentes son ceros, y cualquier otro elemento u = [ai ]n×1. Entonces



Por lo tanto, podemos ver que existe un elemento 0n ∈ V que llamamos y que cumple 0n + u = u + 0n = u

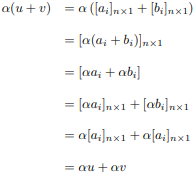
* 1. **Inverso aditivo:** para cada u = [ai ]n×1 en F n proponemos al elemento −u = [−ai ]n×1 y tenemos que:



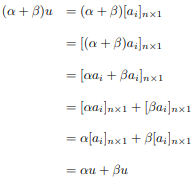
En consecuencia, u + (−u) = (−u) + u = 0.

Para demostrar el **producto por un escalar** se deberían realizar las siguientes verificaciones:

1. **Distributividad del producto respecto a la suma vectorial:**

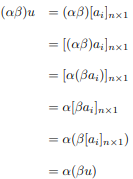


1. **Distributividad de la suma escalar respecto al producto:**

****

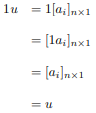
En consecuencia vale la identidad (α + β)u = αu + βu

1. **Asociatividad del producto respecto del producto escalar:**

****

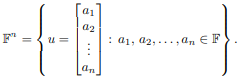
En consecuencia, vale la identidad: (αβ)u = α(βu).

1. **Neutro multiplicativo:** debemos mostrar que 1u = 1



De donde concluimos que 1u = u.

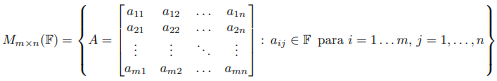
**Elementos del espacio vectorial y sus anotaciones:**

**Vectores**: Sea n un número natural. El conjunto R n se define 

Para simplificar la anotación, a los elementos u ∈ F n los denotamos mediante u = [ai] n×1

Ejemplo: Si n = 2, entonces los elementos R 2 son pares ordenados organizados en columnas. Ejemplos de elementos de R 2 son: . Ahora bien, si fijamos al elemento de R 2 dado por  entonces a1 = −2, a2 = 1.

**Matrices:** Sean m, n números naturales. El conjunto Mm×n(F) de las matrices sobre el cuerpo F de orden m × n, se define



Si A ∈ Mm×n(F), a A le llamamos matriz de orden m × n, a cada elemento aij le llamamos la entrada ij. Para simplificar su escritura, si A ∈ Mm×n(F) solemos escribir de forma A = [aij ]m×n

Una matriz es un arreglo rectangular bidimensional de números en el cuerpo F. El conjunto Mm×n(F) es el conjunto de todos esos posibles arreglos con números en el cuerpo F en m filas y n columnas. las filas están asociadas al contador i y las columnas al contador j.

Ejemplo: Si m = 3 y n = 4 entonces



es un elemento de M3×4, esto es A tiene tres filas y cuatro columnas. Podemos notar que

1. Sus componentes son

2. Sus filas son [2 1 0 −2], [0 1 0 −2], [5 1 0 −2]

3. Sus columnas son

**Polinomios:** Sean n un número natural. El conjunto Pn(F) de los polinomios de grado *menor o igual* *a n con coeficientes* *en* F, se define



A menudo denotaremos a los elementos P(x) ∈ Pn(F) mediante



Ejemplo: El polinomio de grado 2 dado mediante P(x) = −1 + x − 3x 2, pertenece al conjunto P2(R), y vale que a0 = −1, a1 = 1, a2 = −3

**Producto cartesiano:** Si tenemos dos conjuntos no vacíos A y B, el producto cartesiano entre A y B se define mediante A × B = {(a, b) : a ∈ A, y b ∈ B}, Es decir A × B está formado por los pares ordenados (a, b) donde el primer elemento es del conjunto A y el segundo del conjunto B.

Ejemplo: Sea A = B = V donde V es un conjunto no vacío. Entonces V × V = {(u, v) : u, v ∈ V }. Es decir, V × V está formado por los pares ordenados (u, v) donde ambos elementos (u y v) son elementos del conjunto V.

**¿Qué es una función?:** una función consiste en una relación que simbolizamos mediante f : A → B, o bien , que asigna a cada elemento del conjunto A a lo sumo un elemento del conjunto B. El dominio de f son los elementos de A que se relacionan con algún elemento de B. La imagen de f son los elementos de B que tienen un elemento que se relaciona con el conjunto A.

1. **Subespacio vectorial:**

Sea V un espacio vectorial y W un subjunto no vacío de V, W es un subespacio vectorial de V si W es un espacio vectorial (V, F, +, ·). Si deseamos verificar que un subconjunto W∈ V es un subespacio vectorial de V debemos probar que se cumplen todas las condiciones para que se lo tome como un espacio vectorial, pero es demasiado largo, por lo que el siguiente Teorema ilustra una buena técnica para verificar que W es un subespacio vectorial.

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V, es un subespacio vectorial de V si para todo escalar α y para u y v elementos de W αu y u + v también está en W.

**Espacio nulo o kernel ():** Dada una matriz A ∈ Mm×n(F) el Kernel de A se obtiene mediante Ker(A) = {u ∈ F n : Au = 0m}. El **Kernel** es un subespacio vectorial de Fn

Ejemplo: Matriz en M2×3(R). Hallemos su kernel.



Debemos encontrar todos los vectores tal que Au = 02

Esto es  y luego debo crear la matriz ampliada y resolver la matriz por el método que más cómodo me parezca (gauss, sustitución,cramer,etc)

Matriz ampliada 

Reducimos por filas a la matriz ampliada con las operaciones elementales por filas 

Y obtenemos el siguiente resultado . Esto equivale a sistema de ecuaciones x + 4y + 3z = 0, por lo que:



**Imagen de una matriz:** Dada una matriz A ∈ Mm×n su Imagen es el conjunto de vectores *v* ∈ R m para los cuales existe *u* ∈ R n tal que A*u* = *v*. La Im(A) es un subespacio vectorial al igual que el Kernel

Ejemplo: Dada la matriz para encontrar su imagen debemos encontrar todos los vectores ∈ R 2 para los cuales existe un vector ∈ R 3 tal que



Au = v. tenemos que resolver para que a, b ∈ R existen x, y, z ∈ R tal que

Para obtenerlo reducimos por filas a la matriz ampliada y se obtiene

 de la matriz ampliada 

para que tal sistema tenga solución debe cumplirse que b - 1/2a = 0 o a - 2b = 0, por lo que la imagen de A es

1. **Bases y dimensión:**

**Combinación lineal:** Dado un conjunto de vectores S de un espacio vectorial V sobre un cuerpo F, una combinación lineal del conjunto S es una expresión de la forma u = a1u1 + a2u2 + · · · + akuk donde a1, a2, . . ., ak ∈ F.

**Espacio generado:** Sea S = {u1, u2, . . ., uk} un conjunto de vectores de V sobre un cuerpo F. Definimos el espacio generado por S, denotado gen(S) = gen{u1, . . . , uk}, como el conjunto de todos las combinaciones lineales de los elementos u1, . . . , uk. Es decir:

gen(S) = {u ∈ V : u = a1u1 + a2u2 + · · · + akuk donde a1, a2, . . . , ak ∈ F}. El gen(S) es otro subespacio vectorial de V.

**Espacio fila:** Dada A ∈ Mm×n (F n) su Espacio fila es el conjunto de vectores de F n generado por las filas de A

Ejemplo: Dada para encontrar su espacio fila debemos encontrar el conjunto de vectores generado por las filas de A. Esto es equivalente a encontrar es espacio generado por los siguientes vectores:



podemos notar que vale la relación u1 = 2u2, por lo tanto αu1 + βu2 = α(2u2) + βu2 = (2α + β) u2, lo cual dice que cualquier combinación lineal αu1 + βu2 es de la forma (2α + β)u2. En otras palabras, gen {u1, u2} = gen{u2}.

El espacio fila de A es

**Espacio Columna:** Dada A ∈ Mm×n (F n) su espacio columna el subespacio vectorial de Fm generado por las columnas de A.



Ejemplo: Dada para encontrar su espacio columna debemos encontrar el conjunto de vectores generado por las columnas de A equivalente a encontrar es espacio generado por los vectores:



Podemos notar que valen las relaciones u2 = 4u1, u3 = 3u1, por lo tanto αu1 + βu2 + γu3 = αu1 + 4βu1 + 3γu1 = (α + 4β + 3γ)u1, lo cual dice que cualquier combinación lineal αu1 + βu2 + γu3 es de la forma (α + 4β + 3γ)u1. En otras palabras, gen {u1, u2, u3} = gen{u1}.

El espacio columna de A es

**Linealmente independiente/dependiente:** Dado un conjunto de vectores S = {u1, . . ., uk} de un espacio vectorial V será llamado linealmente independiente si cada vez que α1u1 + α2u2 + · · · + αkuk = 0 entonces α1 = α2 = · · · = αk = 0. Si alguno de los escalares no es nulo, entonces se dice que S es linealmente dependiente

Ejemplo: Consideremos el conjunto de vectores en R 2, dado mediante

Para comprobar si S es un conjunto linealmente, comenzamos por fijar

Para comprobarlo suponemos que existe escalares α1, α2 tal que α1u1+α2u2 = 0 equivalente a 

en esta igualdad si tomamos componente a componente se tiene el sistema de ecuaciones lineales en variables α1 y α2



Cuya solución α1 = α2 = 0. Por lo tanto, u1 y u2 son linealmente independientes.

**Base de V:** Conjunto de vectores S = {u1, . . ., un} de un espacio vectorial V es llamado base de V si es linealmente independiente y el espacio generado por S es V, esto pasa si el espacio generado por S tiene la misma forma que V (R3, R2, etc.)

Para determinar si un conjunto S ⊂ F n es una base de F n debemos verificar dos cosas:

* S es linealmente independiente.
* Todo vector de F n es combinación lineal de los vectores del conjunto S.

Los pasos anteriores se pueden simplificar de la siguiente forma: Sea A una matriz cuadrada de orden n, det(A) ≠ 0 si las columnas de A son vectores linealmente independientes por lo que tiene solución lineal independiente, del caso contrario serán linealmente dependiente, en [0,0,0] y con solución trivial o nula en [a,b,c], además, las columnas de A resultan ser una base de F n

**Dimensión de V:** Dado una base B = {u1, . . ., un} de un espacio vectorial V, la dimensión de V es el número de elementos de la base S y se denota por dim(V ).

Ejemplo: La dimensión de Rn es n

**Rango de la Im() y Ker():** definimos el rango de A la dimIm(A) y lo denotamos ρ(A). además definimos la nulidad de A como dimA (dimKer(A), y la denotamos como: ν(A)

1. **Matriz cambio de base:**

Si B = {u1, u2, . . ., un} es una base de un espacio vectorial V cada vector u ∈ V se puede escribir como: u = c1u1 + c2u2 + · · · + cnun, donde ci ∈ R para cada i = 1, . . ., n. Introducimos la siguiente notación:

Ejemplo: Considere dos conjuntos B1 y B2 de vectores en R 2 dados mediante:



Como el det de la matriz compuesta por u1 y u2 es ≠ 0 entonces B1resulta ser una base de R 2. Además, como el det de la matriz compuesta por v1 y v2 es ≠ 0 entonces B2 resulta ser una base de R 2. Cada uno de los vectores de la base B1 se pueden escribir como combinación lineal de los elementos del conjunto B2. Existen escalares α1, α2 ∈ R2 y escalares β1, β2 ∈ R2 tal que u1 = α1v1 + α2v2 y u2 = β1v1 + β2v2.

Esto es equivalente a resolver los sistemas de ecuaciones:

Para no tener que resolver cada sistema por separado, los resolver simultáneamente reduciendo la matriz ampliada de la siguiente forma

🡨matriz ampliada. Se obtendrá

Una vez obtenido ese resultado veamos que obtuvimos:

* El vector  es la solución al sistema que correspondía a resolver el problema u1 = α1v1 + α2v2. Ya hemos encontrado a α1 y α2, por lo tanto, tenemos que



* El vector  es la solución al sistema que correspondía a resolver el problema u2 = β1v1 + β2v2. Ya hemos encontrado a β1 y β2, por lo tanto, tenemos que

**Matriz de transición:** Dado un espacio vectorial V y dos bases de V dadas mediante: B1 = {u1, u2, . . ., un} y B2 = {v1, v2, . . ., vn} llamamos matriz de transición de la base B1 a la base B2 a la matriz formada como sigue A = [u1]B2, [u2]B2 . . . [un]B2.

Sea B1 y B2 bases para un espacio vectorial V. Sea A la matriz de transición de la base B1 a la base B2, para todo u ∈ V vale que [u]B2 = A[u]B1, además A es invertible y vale [u]B1 = A−1 [u]B2.